

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

REKENAFDELING

Leiding: Prof. Dr Ir A. van Wijngaarden

OVER EEN ITERATIEMETHODE TER BEPALING VAN WORTELS

VAN ALGEBRAISCHE VERGELIJKINGEN

Ir A.J.W. Duijvestijn

en

M.L. Potters.

MR 10.

1 9 5 3 .

OVER EEN ITERATIEMETHODE TER BEPALING VAN WORTELS
VAN ALGEBRAISCHE VERGELIJKINGEN.

Inleiding:

Laat $P(x)$ een polynoom zijn van de graad n met nulpunten p_i . Indien de coefficient van x^n gelijk aan 1 is, geldt:

$$P(x) = \prod_{i=1}^n (x-p_i) \quad p_i \neq p_j \quad i \neq j \quad (1.1)$$

Vervolgens is nog een tweede polynoom $Q(x)$ van de graad m gegeven met nulpunten q_i . Hier is eveneens ondersteld, dat de coefficient van x^m gelijk is aan 1.

Derhalve is:

$$Q(x) = \prod_{i=1}^m (x-q_i) \quad q_i \neq p_j \quad (1.2)$$

voor alle i 's en j 's.

Uit de polynomen $P(x)$ en $Q(x)$ vormt men een nieuw polynoom $R(x)$ met nulpunten r_i :

$$R(x) = \prod_{i=1}^M (x-r_i) = P(x) + \varepsilon Q(x)$$

waarin $M = \max(m, n)$ als $\varepsilon \neq -1$.

In het volgende zal een iteratieve methode worden aangegeven om de nulpunten r_1 van $R(x)$ te vinden, die voor $\varepsilon \rightarrow 0$ in de buurt liggen van de nulpunten p_1 van $P(x)$.

Tevens zullen de omstandigheden worden beschouwd, waaronder het proces convergeert.

Iteratieschema:

De nulpunten van $R(x)$ voldoen aan de vergelijking

$$R(x) = P(x) + \varepsilon Q(x) = 0$$

of aan:

$$\prod_{i=1}^n (x-p_i) + \varepsilon \prod_{i=1}^m (x-q_i) = 0.$$

Deze vergelijking is als volgt te schrijven:

$$(x-p_1) \prod_{i=1}^n (x-p_i) + \varepsilon \prod_{i=1}^m (x-q_i) = 0$$

of

$$x-p_1 = -\varepsilon \frac{\prod_{i=1}^m (x-q_i)}{\prod_{i=1}^n (x-p_i) \quad i \neq 1}$$

Stel vervolgens:

$$x = \psi(x) = p_1 - \varepsilon \frac{\prod_{i=1}^m (x-q_i)}{\prod_{i=1}^n (x-p_i) \quad i \neq 1} \quad (2.1)$$

Men kiest nu het volgende iteratieproces:

$$x_n = \gamma(x_{n-1}).$$

Convergentievoorwaarden:

Er gold

$$x = \gamma(x) = p_1 - \varepsilon \frac{\prod_{i=1}^m (x - q_i)}{\prod_{i=1}^n (x - p_i)} \quad \text{voor } x = r_1.$$

$i \neq 1.$

Om de convergentie te beschouwen dient nu een ε omgeving aangegeven te worden, waarvoor $x(\varepsilon)$ regulier is. Het is immers de bedoeling de omgeving van de oplossing van

$$x - \gamma(x) = 0$$

te beschouwen.

Indien men nu

$$\varepsilon = z$$

en

$$x - p_1 = w$$

stelt, gaat

$$x - \gamma(x)$$

over in:

$$\varphi(w, z) = (w + p_1) - p_1 + z \frac{\prod_{i=1}^m (w + p_1 - q_i)}{\prod_{i=1}^n (w + p_1 - p_i)} \quad (3.1)$$

$i \neq 1.$

Men kan nu opmerken, dat: $\varphi(0, 0) = 0$. Verder is $\varphi(w, z)$ in w en in z analytisch. Bovendien zijn de beide partiële afgeleiden in de omgeving van $w = 0$ en $z = 0$ ongelijk aan nul.

Volgens Bieberbach bestaat dan een oplossing $w(z)$, die in $z = 0$ verdwijnt en in de omgeving van $z = 0$ analytisch is. Kies nu $\varepsilon = z$ in deze omgeving.

Vervolgens dient te worden opgemerkt, dat $\gamma(x)$ in de omgeving van $x = p_1$ analytisch is in x . Derhalve bestaat in die omgeving $\gamma'(x)$.

Volgens Darboux geldt:

$$|x - x_n| = |\gamma(x) - \gamma(x_{n-1})| \leq \left| \supremum \gamma'(\xi_{n-1}) \right| |x - x_{n-1}|$$

$\xi_{n-1} \in \overline{x - x_{n-1}} \quad (3.2)$

Dus ξ_{n-1} is een element van lijnstuk $x - x_{n-1}$.

Indien men nu het product vormt van linker- en rechterleden voor iedere n , verkrijgt men:

$$|x - x_n| \leq |x - x_0| \prod_{k=1}^n \supremum \gamma'(\xi_k) \quad \xi_k \in \overline{x - x_k}$$

Voor convergentie is dus voldoende, dat $|\gamma'(\xi_k)| < 1$.

Nu is

$$\psi'(x) = \varepsilon \frac{\prod_{i=1}^m (x - q_i)}{\prod_{i=1}^n (x - p_i)} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x - p_i} \right) - \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{x - q_i} \right) \right\} \quad (3.3)$$

$i \neq 1$

Om de $\psi'(x)$ te schatten in de omgeving van $x = p_1$, worden de volgende veronderstellingen gemaakt:

In de omgeving van $x - p_1$ zij

$$|x - p_i| > A \quad \text{voor elke } i.$$

Verder zij voor elke i

$$C < |x - q_i| < B$$

dan is

$$\psi'(x) \leq \varepsilon \frac{B^m}{A^n} \left\{ \frac{n-1}{A^{n-1}} + \frac{m}{C^m} \right\} = \varepsilon B^m \left\{ \frac{n-1C^m + mA^{n-1}}{A^{2n-1} C^m} \right\}$$

in de omgeving van $x = p_1$.

Voor convergentie is dus voldoende als voldaan is aan:

$$\varepsilon < \frac{B^m \{n-1C^m + mA^{n-1}\}}{A^{2n-1} C^m} \quad (3.4)$$

Hulpiteratie:

Als men twee iteraties uitgevoerd heeft, kan men nog een tussenstap doen, die sneller naar het resultaat voert. De eerste schatting was x_0 . Hieruit volgde een x_1 . Deze gaf op zijn beurt x_2 .

$$x_0 \rightarrow x_1$$

$$x_1 \rightarrow x_2.$$

Men vindt dan volgens Hartree:

$$\frac{x^* - x_2}{x^* - x_1} = \frac{x^* - x_1}{x^* - x_0} \quad (4.1)$$

Men kan aantonen dat dit een "tweede" orde proces is.

Voorbeeld:

Zij $n = 18$ en $m = 16$. $\varepsilon = 2,35397 \cdot 10^{-7}$.

de wortels p_i

de wortels q_i

$\pm 0,503615$		$\pm 3,37048i$ (2x)
$\pm 0,426579 + i 0,476072$ en $\pm 0,426579 - i 0,476072$		$\pm 1,90020i$ (2x)
$\pm 0,268643 + i 0,803448$ en $\pm 0,268643 - i 0,803448$		$\pm 1,50000i$ (2x)
$\pm 0,126801 + i 0,975814$ en $\pm 0,126801 - i 0,975814$		$\pm 1,37026i$ (2x)
$\pm 0,0222782 + i 1,045506$ en $\pm 0,0222782 - i 1,045506$		

Men kan nu de polynomen $P(x)$ en $Q(x)$ vormen.
Men stelt hierin $x^2 = y$.

Als beginschatting werd genomen:

$$x_0 = - 0,426579 + i 0,476072.$$

$$\text{Derhalve } y_0 = - 0,04467491 + i 0,40616463$$

$$y_1 = - 0,05617247 + i 0,38356578$$

$$y_2^* = - 0,05781654 + i 0,38062092$$

$$y_2 = - 0,05808857 + i 0,38018082$$

$$y_3 = - 0,05810669 + i 0,38015247$$

$$y_4 = - 0,05810944 + i 0,38014853$$

$$y_4^* = - 0,05810993 + i 0,38014790$$

$$y_5 = - 0,05810993 + i 0,38014790$$

Hieruit volgt voor $x = - 0,404013 + i 0,470464$.

Literatuur.

Bieberbach, Funktionentheorie, p.192.

Hartree, Proceedings Cambridge Society, Vol.45, 1949, blz.230.

Handelingen, 33ste Natuur- en Geneeskundig Congres te Leiden, W.v.
Luxemburg.